ÇÖZÜMLER

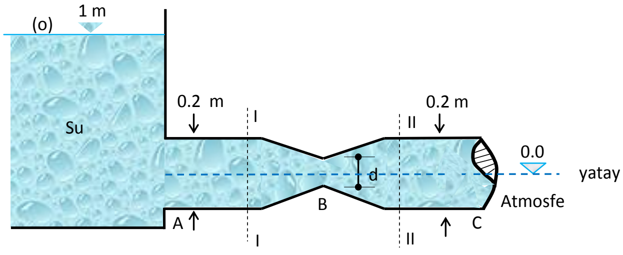
Soru 1 : Şekildeki hazne boru sisteminde sıkışmaz ve ideal akışkanın (su) permanan bir akımı mevcuttur. Su yatay eksenli ABC borusu ile atmosfere boşalmaktadır. Mutlak atmosfer basıncını 9.81 N/cm^2 ve suyun mutlak buharlaşma basıncını 0.23 N/cm^2 alarak,

a- Sistemin debisini hesap ediniz.

b- Sistemin debisini değiştirmeden ve suyun buharlaşmasına sebep olmadan, B kesitinde boru çapının alabileceği minimum değeri bulunuz.

c- Sistemin mutlak ve rölatif enerji ile piyezometre çizgilerini çiziniz.

d- (I-I) ve (II-II) kesitleri arasını kontrol hacmi seçerek, akımın önce daralıp, sonra genişleyen boru parçasına uyguladığı kuvveti bulunuz.



Sonuç: $Q=0.1392\ m^3/s$; $d_{min}=0.11$ m

Çözüm 1:

O ile C arasında BERNOULLİ Denklemi yazılırsa,

$$Z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = Z_E + \frac{p_E}{\gamma} + \frac{v_E^2}{2g}$$

$$1 + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{v_E^2}{2g} \rightarrow v_E^2 = 2g \rightarrow v_E = \sqrt{19.62} \rightarrow v_E = 4.42\, m/s$$

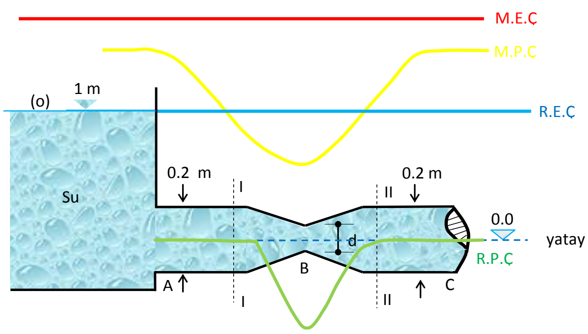
$$Q = v_E x A_E \rightarrow Q = 4.42x\frac{(0.2)^2\pi}{4} \rightarrow Q = 0.14\, m^3/s$$

B ile C arasında BERNOULLİ Denklemi yazılırsa,

$$Z_B + \frac{(p_B)_m}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} = Z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{v_C^2}{2g}$$

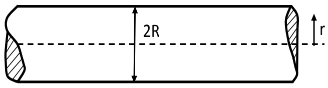
$$0 + 0.23 + \frac{v_B^2}{2g} = 0 + 10 + \frac{(4.42)^2}{19.62} \rightarrow v_B^2 = \rightarrow v_B = \sqrt{211.30} \rightarrow v_B = 14.54\, m/s$$

$$Q = v_B x A_B \rightarrow 0.14 = 14.54x\frac{(d_{min})^2\pi}{4} \rightarrow d_{min} = 0.14\, m$$



ÇÖZÜMLER

Soru 2 : Yarıçapı 10 cm olan boru enkesitindeki hız dağılışı metrik birimlerle $U = 400(R^2 - r^2)$ bağıntısıyla verildiğine göre, eksendeki maksimum hızı, borudan geçen debiyi ve borudaki ortalama hız değerini hesaplayınız.



Sonuç: $U_{max} = 4\, m/s\, ; Q = 0{,}0628\, m^3/s\, ;\, V_{ort} = 2\, m/s$

Çözüm 2:

R=10 cm

$$U = 400(R^2 - r^2)$$

$$U_{max} = ?\, ; Q = ?\, ;\, V = ?$$

$$U_{max}\ için\ r = 0\ olmalı$$

$$U_{max} = 400((0.1)^2 - 0^2) = 4\, m/s$$

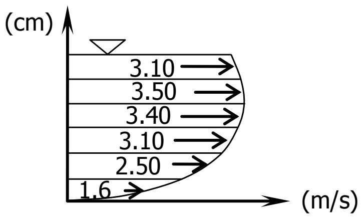
$$Q = \int_A udA\, ; A = \pi r^2\, ; dA = 2\pi r dr$$

$$Q = \int_0^R u 2\pi r dr\ \rightarrow Q = 2\pi \int_0^{0.1} 400((0.1)^2 - 0^2) r dr$$

$$Q = 2\pi \int_0^{0.1} 400 r (0.1)^2 dr - 2\pi \int_0^{0.1} 400 r^3 dr\ \rightarrow Q = 0.0628\, m^3/s$$

$$V = \frac{0.0628}{\pi (0.1)^2}\ \rightarrow V = 2\, m/s$$

Soru 3 : Geniş bir kanalın orta kısmında bir pitot tüpü ile bir düşey boyunca yapılmış hız ölçümleri şekilde gösterilmiştir. Kanalın birim genişliğinden geçen debiyi ve ortalama debiyi bulunuz.



Sonuç: V_o=2.87 m/s

Çözüm 3:

$$q_1 = v_1 A_1\ \rightarrow\ q_1 = 1.60x(1x0.5)\ \rightarrow\ q_1 = \frac{1.6}{2} m^3/s\, .\, m$$

$$q_2 = v_2 A_2\ \rightarrow\ q_2 = 2.50x(1x0.5)\ \rightarrow\ q_2 = \frac{2.50}{2} m^3/s\, .\, m$$

$$q = \frac{1}{2}(1.60 + 2.50 + 3.10 + 3.40 + 3.50 + 3.10)\ \rightarrow q = 8.6\, m^3/s\, .\, m$$

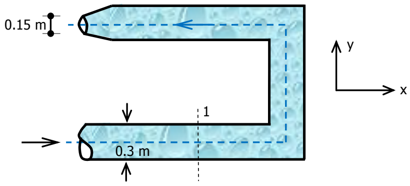
$$V_{ort} = \frac{q_t}{A_t}\ \rightarrow\ V_{ort} = \frac{8.6}{1x3}\ \rightarrow V_{ort} = 2.87\, m/s$$

ÇÖZÜMLER

Soru 4 : Yatay düzlemde bulunan şekildeki dirsekten geçen su jeti atmosfere dökülmektedir. (1) kesitinde ortalama akım hızı v_1=2 m/s ve rölatif basınç p_1=19.62 N/cm^2 dir. Akışkanı gerçek, sıkışmaz ve mutlak atmosfer basıncını 9.81 N/cm^2 kabul ederek,

a- Dirsekte meydana gelen enerji kaybını bulunuz.

b- Akımın dirseğe uyguladığı kuvvetin x ve y bileşenlerini hesap ediniz.



Sonuç: a- $h_k = 6.98\,m$ b- $R_x = 8.35\,kN;\ R_y = 0$

Çözüm 4:

$v_1 = 2\,m/s\,; p_1 = 19.62\,N/cm^2\,;\ p_0 = 9.81\,N/cm^2$

a-

$$Q = 2\frac{\pi(0.3)^2}{4} \rightarrow Q = 0.1414 m^3/s$$

$$v_2 = \frac{0.1414}{\pi(0.15)^2} \rightarrow\ v_2 = 8\,m/s$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_k$$

$$\frac{2^2}{19.62} + 20 = \frac{8^2}{19.62} + h_k\ \rightarrow\ h_k = 16.94\,m$$

b-

$$p_1 A_1 = 196.2\frac{\pi\,(0.3)^2}{4} = 13.87\,kN$$

$$\rho Q v_1 = \frac{9.81x1000}{9.81}x0.1414x2 = 0.28\,kN$$

$$\rho Q v_2 = \frac{9.81x1000}{9.81}x0.1414x8 = 1.13\,kN$$

$$\sum F_{xi} = p_1 A_1 + \rho Q v_1 + \rho Q v_2 - R_x = 0$$

$$R_x = 13.87 + 0.28 + 1.13\ \rightarrow\ R_x = 15.28\,kN$$

$$R_x =\ -15.28\,kN$$

Soru 5 : İdeal ve sıkışmaz bir akışkanın iki boyutlu akımda hız bileşenleri,

$u = -2ax,\ \ v = 2ay$ şeklinde verilmiştir (a=sabit).

a- Böyle bir akım fiziksel olarak mümkün müdür?

b- Hareket hız potansiyelli midir? Hız potansiyelli ise hız potansiyel fonksiyonunu bulunuz.

c- Bu akıma ait akım fonksiyonunu belirleyiniz.

d- a=1 için M(1,1) noktasında, akımın hız ve ivme bileşenleri ile bileşke hızını ve bileşke ivmesini belirleyiniz.

Çözüm 5:

$u = -2ax;\ \ v = 2ay$

a-

ÇÖZÜMLER

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \rightarrow olmalı$

$\frac{\partial u}{\partial x}=-2a$

$\frac{\partial v}{\partial y}=2a$

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \rightarrow -2a+2a=0 \ \rightarrow Akım\ fiziksel\ olarak\ mümkündür.$

b-

$w_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\ ;\ w_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right);\ w_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

$w_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \ \rightarrow \ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$

$\frac{\partial v}{\partial x}=0;\ \frac{\partial u}{\partial y}=0\ \rightarrow 0=0\ Hız\ potansiyellidir. Potansiyel\ akım\ çevrintisiz\ akım. Ohalde$

$u=\frac{\partial \emptyset}{\partial x}, v=\frac{\partial \emptyset}{\partial y}$

$\partial \emptyset_1=u\partial x\ \rightarrow\ \int \partial \emptyset_1=\int -2ax\partial x\ \rightarrow\ \emptyset_1=-ax^2+c_1$

$\partial \emptyset_2=v\partial y\ \rightarrow\ \int \partial \emptyset_2=\int -2ay\partial y\ \rightarrow\ \emptyset_2=ay^2+c_2$

$\emptyset=\emptyset_1+\emptyset_2\ \rightarrow\ \emptyset=a(y^2-x^2)+c$

c-

$u=\frac{\partial \psi}{\partial y}, v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$

$\int \partial\psi_1=\int u\,\partial y \rightarrow \int \partial\psi_1=\int -2ax\,\partial y\ \rightarrow \psi_1=-2axy+c_1$

$\int \partial\psi_2=\int -v\,\partial x \rightarrow \int \partial\psi_2=\int -2ay\,\partial x\ \rightarrow \psi_2=-2axy+c_2$

$\psi=\psi_1+\psi_2 \rightarrow \psi=-2axy+c$

d-

a=1 için M(1,1)

$u=-2\,m/s\,;v=2\,m/s\ \rightarrow V=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}$

$V=2\sqrt{2}\,m/s$

$a_x=\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\ \rightarrow\ a_x=-2(-2a)+2(0)+0\ \rightarrow\ a_x=4\,m/s^2$

$a_y=\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\ \rightarrow\ a_y=-2(0)+2(2y)+0\ \rightarrow\ a_y=4\,m/s^2$

$a=\sqrt{(a_x)^2+\left(a_y\right)^2}\ \rightarrow a=\sqrt{(4)^2+(4)^2}\ \rightarrow a=4\sqrt{2}\,m/s^2$

Soru 6 : (x-y) düzleminde oluşan, sıkışmaz bir akışkan 2 boyutlu akımda hız bileşenleri $u=-x, v=y$ şeklinde verilmiştir.

ÇÖZÜMLER

a- Bu akımın akım fonksiyonunu belirleyiniz.

b- Bu akım hız potansiyelli midir? Hız potansiyelli ise potansiyel fonksiyonunu belirleyiniz.

c- Bu akım ortamında A(-1,1) ve B(-2,3) noktalarını birleştiren bir doğru veya eğriden geçen debiyi birim genişlik için bulunuz.

Çözüm 6:

$u = -x, v = y$

a-

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\partial\psi = -x\partial y \rightarrow \int \partial\psi = \int -x\partial y \rightarrow \psi_1 = -xy + c_1$$

$$\partial\psi = -y\partial y \rightarrow \int \partial\psi = \int -y\partial y \rightarrow \psi_2 = -xy + c_2$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = -xy + c \rightarrow \psi = -xy + c = sabit$$

b-

Çevrintisizlik koşulunu sağlayalım $\emptyset = \emptyset(x, y, t)$

$$w_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \; çevrintisizlik\; şartı$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0; \frac{\partial u}{\partial u} = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial u} = 0 \rightarrow 0 - 0 = 0 \; hız\; potansiyelli$$

$$u = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}, v = \frac{\partial\emptyset}{\partial y}$$

$$\int \partial\emptyset = \int -x\partial x \rightarrow \emptyset_1 = -\frac{x^2}{2} + c_1$$

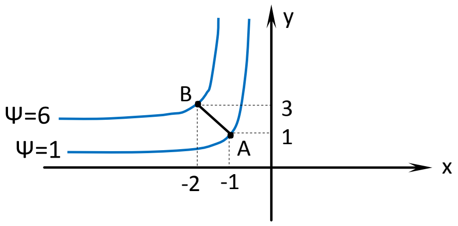
$$\int \partial\emptyset = \int y\partial y \rightarrow \emptyset_2 = -\frac{y^2}{2} + c_2$$

$$\emptyset = \emptyset_1 + \emptyset_2 \rightarrow \emptyset = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + c$$

c-

$$A(-1,1) \rightarrow \psi_A = -1(-1)(1) = 1$$

$$B(-2,3) \rightarrow \psi_B = -1(-2)(3) = 6$$



$$q = \int_A^B d\psi \rightarrow q = \psi_A - \psi_B \rightarrow q = (6-1)1 \rightarrow q = 5m^3/s\,.m$$

ÇÖZÜMLER

Soru 7 : İdeal ve sıkışmayan bir akışkanın 2 boyutlu akımı için akım fonksiyonu $\psi = -2axy$ olarak veriliyor.

a- Bu akım fiziksel olarak mümkün müdür?

b- Bu akım hız potansiyelli midir? Hız potansiyelli ise potansiyel fonksiyonunu belirleyiniz.

c- a=1 için N(1,1) noktasında, akımın hız ve ivme bileşenleri ile bileşke hızını ve bileşke ivmesini belirleyiniz.

d- Akım ağını çiziniz.

Çözüm 7:

a-

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2ax$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2ay$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = o\ mı?$$

$$-2a + 2a = 0\ süreklilik\ denklemini\ sağlıyor\ ve\ fiziksel\ olarak\ mümkündür.$$

b-

$$w_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0\ \rightarrow\ w_z = \frac{1}{2}(0-0) = 0\ hız\ potansiyelli\ (çevrintisiz)$$

$$u = \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\ \rightarrow\ \partial\emptyset = -2ax\partial x\ \rightarrow \int \partial\emptyset = \int -2ax\partial x\ \rightarrow\ \emptyset_1 = -ax^2 + c_1$$

$$v = \frac{\partial \emptyset}{\partial y}\ \rightarrow\ \partial\emptyset = 2ay\partial y\ \rightarrow \int \partial\emptyset = \int 2ay\partial y\ \rightarrow \emptyset_2 = ay^2 + c_2$$

$$\emptyset = \emptyset_1 + \emptyset_2\ \rightarrow\ \emptyset = a(y^2 - x^2) + c$$

c-

$$a = 1 = sabit\ ve\ N(1{,}1)\ \rightarrow u = -2\ ve\ v = 2\ \rightarrow V = \sqrt{(u^2) + (v^2)}\ \rightarrow V = \sqrt{(-2^2) + (2^2)}\ \rightarrow V = 2\sqrt{2}\ m/s$$

$$a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\ \rightarrow\ a_x = (-2)(-2) + (2)(0)\ \rightarrow\ a_x = 4\ m/s^2$$

$$a_y = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\ \rightarrow\ a_y = (-2)(0) + (2)(2)\ \rightarrow\ a_y = 4\ m/s^2$$

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}\ \rightarrow a = \sqrt{(4)^2 + (4)^2}\ \rightarrow a = 4\sqrt{2}\ m/s$$

d-

$$\psi = -4a\ olsun$$

$$-2axy = -4a$$

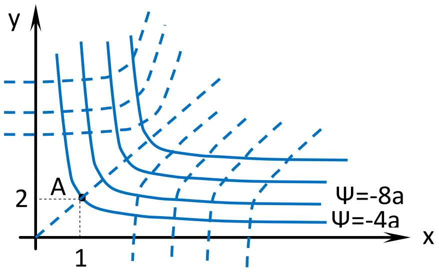
$$xy = 2\ \rightarrow y = \frac{2}{x}$$

$$-2axy = -8a$$

$$xy = 4$$

$$y = \frac{4}{x}$$

ÇÖZÜMLER



Soru 8 : 2 boyutlu bir akım $u = 4y, v = 4x$ bileşenleri ile verilmiştir.

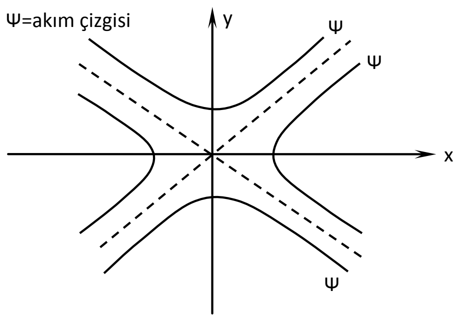
a- Bu akıma ait akım çizgilerini çiziniz.

b- x=1, y=1 noktasındaki ivme bileşenlerini hesaplayınız.

c- Bu akımın akım fonksiyonu, varsa potansiyel fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm 8:

a-



b-

x=1 ve y=1 noktasındaki ivme bileşenleri

$$a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \frac{\partial u}{\partial y} = 4; \frac{\partial v}{\partial x} = 4; \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \frac{\partial u}{\partial t} = 0; \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$a_x = (4)(0) + (4)(4) + 0 \rightarrow a_x = 16m/s^2$$

$$a_y = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$a_y = (4)(4) + (4)(0) + 0 \rightarrow a_y = 16\,m/s^2$$

$$Bileşke\ ivme\ a = \sqrt{(a_x)^2 + \left(a_y\right)^2} \rightarrow a = \sqrt{(16)^2 + (16)^2} \rightarrow a = 16\sqrt{2}\,m/s^2$$

c-

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow \int \partial\psi = \int u\partial y \rightarrow \int \partial\psi = \int 4y\partial y \rightarrow \psi_1 = 2y^2 + c_1$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow \int \partial\psi = \int -v\partial x \rightarrow \int \partial\psi = \int -4x\partial x \rightarrow \psi_2 = -2x^2 + c_2$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \rightarrow \psi = 2y^2 + c_1 + (-2x^2) + c_2$$

$$\psi = 2(y^2 - x^2) + c \quad akım\ fonksiyonu$$

ÇÖZÜMLER

$$w_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \;\rightarrow\; w_z = \frac{1}{2}(4-4) = 0 \;\; Akım\ potansiyellidir.$$

$$u = \frac{\partial \emptyset}{\partial x} \rightarrow \int \partial\emptyset = \int u\partial x \;\rightarrow\; \int \partial\emptyset = \int x\partial x \rightarrow \emptyset_1 = 4xy + c_1$$

$$v = \frac{\partial \emptyset}{\partial y} \rightarrow \int \partial\emptyset = \int v\partial y \;\rightarrow\; \int \partial\emptyset = \int 4x\partial y \;\rightarrow \emptyset_2 = 4xy + c_2$$

$$\emptyset = \emptyset_1 + \emptyset_2 \;\rightarrow\; \emptyset = 4xy + c_1 + 4xy + c_2$$

$$\emptyset = 4xy + c \;\; potansiyel\ fonksiyonu.$$

Soru 9 : Sıkışmayan bir sıvının akımında hız bileşenleri şu şekildedir.

$$u = kx(y+z)\,, v = ky(x+z)\,, w = -kz(x+y) - z^2$$

- a- Bu hız alanının akışkanlara ait bir akım alanına karşı gelmesi için "k" ne olmalıdır.
- b- Akım permanan mıdır? Neden?
- c- Akım üniform mudur? Neden?
- d- Akım çevrintilimidir? Neden?
- e- (1, -1, 1) noktasında çevrinti vektörünün bileşenlerini hesaplayınız.

Çözüm 9:

a-

Bu hız alanının akışkanlara ait bir akım alanına karşı gelmesi için k ne olmadır. Süreklilik denklemini sağlaması gerekir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \; olmalı$$

$$k(y+z) + k(x+z) - k(x+y) = 0$$

$$k(y+z+x+z-z-y) - 2z = 0$$

$$2zk - 2z = 0 \;\rightarrow 2zk = 2z$$

$$k = 1 \; olmalıdır.$$

b-

Akım zamana bağlı değilse PERMANAN AKIM söz konusudur.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0; \frac{\partial v}{\partial t} = 0; \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \; akımın\ hız\ bileşenleri, t(zaman)dan\ bağımsız\ olduğundan\ akım\ permanandır.$$

c-

Akım karekteristiklerinin akım boyunca hep aynı kaldığı akım $\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ise üniform akımdır.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k(y+z); değişken$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = k(x+z); değişken$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -k(x+y) - 2z; değişken$$

Akım üniform değildir.

$$w_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

ÇÖZÜMLER

$$w_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \ \ ise\ çevrintisiz\ akım$$

$$w_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0$$

d-

$$w_z = \frac{1}{2}(y - x) \neq 0$$

$$w_y = \frac{1}{2}(x + z) \neq 0 \ \ AKIM\ ÇEVRİNTİLİDİR.$$

$$w_z = \frac{1}{2}(-z - y) \neq 0$$

e-

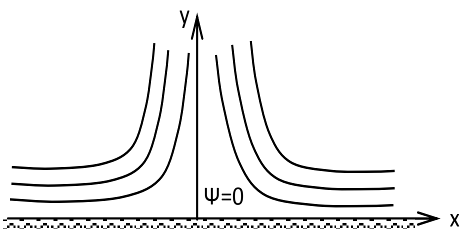
$$w_z = \frac{1}{2}(-1 - 1) = -1$$

$$w_y = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

$$w_z = \frac{1}{2}(-1 + 1) = 0$$

Soru 10 : Yatay bir plakaya çarpan 2 boyutlu düşey bir jetin, düşey hız bileşenin, plakaya olan uzaklıkla orantılı olduğu görüldüğüne göre, akım alanını tanımlayan akım fonksiyonunu belirleyiniz.

Çözüm 10:



Yukarıdaki gözleme göre: $v = -ky$ veya $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -k$ yazılabilir.

Diğer taraftan süreklilik denklemine göre:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\ olduğundan,$$

$$\partial u = -\frac{\partial v}{\partial y}dx \ \rightarrow \int \partial u = -\int (-k)dx \rightarrow u = kx + c$$

Sınır koşulu olarak, simetri nedeniyle x=0 için u=0 alınırsa c=0 olacağı görülür.

Akım çizgisinin tam diferansiyeli

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy \ \rightarrow d\psi = -vdx + udy\ olduğundan\ u\ ve\ v\ değerleri\ yerine\ yazılırsa,$$

$$d\psi = kydx + kxdy \ \rightarrow \ d\psi = k(ydx + xdy)\ her\ iki\ tarafın\ entegrasyonu\ alınırsa,$$

ÇÖZÜMLER

$$\int d\psi = \int kydx + \int xdy \rightarrow \psi = kxy + c\ olur.$$

Akım çizgilerinin görünüşü:

Bir akım çizgisi boyunca ψ=sabit olduğuna göre, son ifadeden,

$y = \dfrac{sabit}{x}$ elde edilir. Buna göre akım çizgileri birer hiperboldür. Ayrıca x ve y eksenleri boyunca olan akım çizgisi için, x=0, y=0 olur.

Soru 11 : Sıkışmayan bir akışkanın düzlemsel akımda hız alanı,

$$u = 3x^2 - 3y^2 \quad ve \quad v = -6xy$$

a- Akımın çevrintisiz olduğunu gösteriniz.

b- M(x ,y) noktasındaki ivme bileşenlerini ve bileşke ivmeyi yazınız. A(1,1) noktasındaki bileşke ivmeyi bulunuz.

Çözüm 11:

a-

$w_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ olmalı

$$w_z = \frac{1}{2}\left(-6y - (-6y)\right) = 0\ \ AKIM\ ÇEVRİNTİLİDİR.$$

$$a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow a_x = (3x^2 - 3y^2)(6x) + (-6xy)(-6y) \rightarrow a_x = 18x(x^2 + y^2)$$

$$a_y = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} \rightarrow a_y = (3x^2 - 3y^2)(6y) + (-6xy)(-6x) \rightarrow a_y = 18y(x^2 + y^2)$$

b-

$$a_x = 18(1)((1)^2 + (1)^2) \rightarrow a_x = 36\, m/s^2$$

$$a_y = 18(1)((1)^2 + (1)^2) \rightarrow a_y = 36\, m/s^2$$

$$a = \sqrt{(36)^2 + (36)^2} \rightarrow a = 36\sqrt{2}\, m/s^2$$

Soru 12 : İki boyutlu bir akımda hız alanı

$$u = (2xy + t^2)\ , \qquad v = (x^2 - y^2 + 10t)$$

verilmiştir.

a- Bu akım fiziksel olarak mümkün müdür?

b- Bu akım permanan mıdır?

c- Bu akım hız potansiyelli midir? Hız potansiyelli ise potansiyel fonksiyonunu b ulunuz.

d- Bu akımın akım fonksiyonunu belirleyiniz.

e- Bu akım alanında A(1,1) noktasında ve t=1 anındaki hız ve ivme bileşenleri ile bileşke hızı ve ivmeyi hesaplayınız.

Çözüm 12:

a-

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad olmalı$$

$$2y - 2y = 0\ \ fiziksel\ olarak\ mümkün.$$

b-

ÇÖZÜMLER

Bu akımın hız bileşenlerinde (t) zaman bağlı terim olduğundan akım permanan değildir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2t \neq 0\,, \frac{\partial u}{\partial t} = 10 \neq 0 \;\; olduğundan\; permanan\; değildir.$$

c-

$$w_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \rightarrow \; w_z = (2x - 2y) = 0 \;\; akım\; hız\; potansiyellidir.$$

$$u = \frac{\partial \emptyset}{\partial x} \rightarrow \int \partial \emptyset = \int u \partial x \rightarrow \int \partial \emptyset = \int (2xy + t^2)\partial x \rightarrow \emptyset_1 = x^2 y + t^2 y + c_1$$

$$v = \frac{\partial \emptyset}{\partial y} \rightarrow \int \partial \emptyset = \int v \partial y \rightarrow \int \partial \emptyset = \int (x^2 + y^2 + 10t)\partial y \rightarrow \emptyset_2 = x^2 y - \frac{1}{3}y^3 + 10ty + c_2$$

$$\emptyset = \emptyset_1 + \emptyset_2 \rightarrow \emptyset = x^2 y - \frac{1}{3}y^3 + t(tx + 10y) + c$$

d-

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow \int \partial \psi = \int u \partial y \rightarrow \int \partial \psi = \int (2xy + t^2)\partial y \rightarrow \psi_1 = xy^2 + t^2 y + c_1$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow \int \partial \psi = \int -v \partial x \rightarrow \int \partial \psi = \int -(x^2 - y^2 + 10t)\partial x \rightarrow \psi_2 = -\frac{x^3}{3} + xy^2 - 10tx + c_2$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \rightarrow \psi = xy^2 + t^2 y + c_1 - \frac{x^3}{3} + xy^2 - 10tx + c_2$$

$$\psi = -\frac{x^3}{3} + xy^2 + t(ty - 10x) + c$$

e-

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2t \rightarrow t = 1 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \; lokal\; ivme$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 10 \rightarrow lokal\; ivme$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \rightarrow x = 1 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \rightarrow y = 1 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \quad konvektif\; ivme$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x \rightarrow x = 1 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2y \rightarrow y = 1 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -2$$

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow a_x = 2 + (3)(2) + (10)(2) \rightarrow a_x = 28\, m/s^2$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow a_y = 10 + (3)(2) + (10)(-2) \rightarrow a_y = -4\, m/s^2$$

$$a = \sqrt{(28)^2 + (-4)^2} \rightarrow a = 28.28\, m/s^2$$

Soru 13 : İdeal bir akışkanın iki boyutlu akımda hız bileşenleri,

$u = 16y - 12x \;\;,\;\; v = 12y - 9x$

olarak verilmiştir. Bu akımın;

ÇÖZÜMLER

a- Permanan olup olmadığını gösteriniz.

b- Fiziksel olarak gerçekleşmesinin mümkün olup olmadığını belirleyiniz.

c- Hız potansiyelli olup olmadığını inceleyiniz.

d- Akım çizgilerinin denklemini belirleyiniz. Koordinatları x=1, y=2 olan noktadan geçen akım çizgisinin denklemini bulunuz.

e- Eş-potansiyel eğrilerinin denklemi belirlenebilir mi? Nedenlerini açıklayınız.

f- Bu akımda Bernoulli bağıntısının nerelerde geçerli olduğunu nedenleriyle açıklayınız.

Çözüm 13:

a-

Akım permanan ise $\frac{\partial u}{\partial t}=0, \frac{\partial v}{\partial t}=0$ olmalı

u ve v hız bileşenleri zamandan bağımsız olduğundan $\frac{\partial u}{\partial t}=0\ ve\ \frac{\partial v}{\partial t}=0$ bu nedenle akım permanandır.

b-

fiziksel olarak gerçekleşebilmesi için $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\mathbf{0}$ olmalı

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-12$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\mathbf{12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \mathbf{-12+12=0}$$

Bu akım fiziksel olarak gerçekleşir.

c-

$$w_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \rightarrow akım\ hız\ potansiyellidir.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-9$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=16$$

$$w_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \rightarrow w_z=\frac{1}{2}(-9-16)\neq 0\ \ AKIM\ HIZ\ POTANSİYELLİ\ DEĞİLDİR.$$

d-

Akım çizgisi denklemi

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow \int \partial\psi=\int u\partial y \rightarrow \int \partial\psi=\int (16y-12x)\partial y \rightarrow \psi_1=8y^2-12xy+c_1$$

$$v=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow \int \partial\psi=\int -v\partial x \rightarrow \int \partial\psi=\int -(12y-9x)\partial x \rightarrow \psi_2=12xy-\frac{9x^2}{2}+c_2$$

$$\psi=\psi_1+\psi_2 \rightarrow \psi=8y^2-12xy+c_1+12xy-\frac{9x^2}{2}+c_2$$

$$\psi=8y^2-\frac{9}{2}x^2+c$$

e- Belirlenemez. Çünkü hareket hız potansiyelli değildir.

f- Akım hız potansiyelli olmadığından BERNOULLI denklemi yalnız bir akım çizgisi üzerinde geçerlidir.